Föreläsning 2

Under förra föreläsningen så nämnde vi singulära punkter för funktioner. Vi ska snart få se att vissa singulariteter kan man ta bort, eller rättare sagt man kan definiera om sin funktion så att funktionen blir definierad, dvs ha ett värde, där singulariteten finns.

Ex:

Betrakta funktionen $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$.

Observera att $x=1$ är en singularitet. Men $x^3-1=0$ har lösning $x=1$, så enligt faktorsatsen så är $(x-1)$ en faktor i x^3-1. Polynomdivision ger att

$$\begin{array}{l} x^3-1 : (x-1) = x^2+x+1 \\ \underline{-(x^3-x^2)} \\ \quad x^2-1 \\ \underline{\;-(x^2-x)} \\ \qquad x-1 \end{array}$$

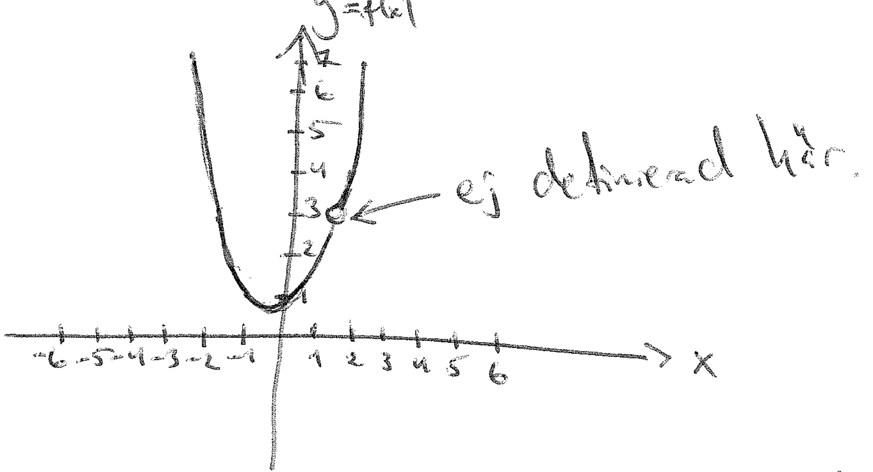
Därför är

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}=x^2+x+1$$

för $x\neq 1$. Så "nära" $x=1$ så är

$$f(x)\approx 1^2+1+1=3.$$

Detta ger att $f(x)$ är parabeln x^2+x+1 förutom i punkten $x=1$, där f inte antar något värde:



Vi kan således definiera om $f(x)$ som

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & ; x\neq 1 \\ 3 & ; x=1 \end{cases}$$

Detta betyder att f kommer bli kontinuerlig där också. Mer om detta senare.

Föregående exempel visar på ~~vad~~ vad gränsvärden är, dvs hur funktionen uppträder t.ex. nära singulariteter.

<u>Def:</u> (Gränsvärden)

Låt $f(x)$ vara en funktion definierad i en omgivning till $x=a$. Vi säger att $f(x)$ närmar sig L då x närmar sig a, skrivet $\lim_{x\to a} f(x)=L$ eller $f(x)\to L$ då $x\to a$, om för varje $\varepsilon>0$ det finns ett $\delta>0$ så att $|f(x)-L|<\varepsilon$ då $0<|x-a|<\delta$.

<u>Anm:</u>

Definitionen ovan betyder att om vi väljer x nära a så kommer $f(x)$ komma godtyckligt nära L.

Ex:

Betrakta $f(x)=x$. Vad blir då $\lim_{x\to a} f(x)$?
Intuitivt så är det klart att då x närmar sig a så kommer $f(x)$ närmar sig a, ty $f(x)$ är ju lika med x!
Enligt definitionen:
Tag $\varepsilon>0$. Vi har att $|f(x)-a|=|x-a|<\varepsilon$ om $|x-a|<\varepsilon$, så $\delta=\varepsilon$ i detta fall.
Man har att δ beror oftast på ε!!

Ex:

Betrakta den konstanta funktionen $f(x)=c$ där $c\in\mathbb{R}$. Vad är $\lim_{x\to a} f(x)$? Men $f(x)=c$ närmar sig c då $x\to a$, ty $f(x)$ är ju lika med c hela tiden.
Enligt definitionen:
Tag $\varepsilon>0$. Vi har att $\varepsilon>|f(x)-c|=|c-c|=0$. Vi kan alltså välja vilket ε vi vill.

Ex:

Beräkna $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$. Vi har att

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \underbrace{\frac{(\sqrt{4+h}+2)}{(\sqrt{4+h}+2)}}_{\text{Förlänga med konjugat}} = \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{4+h}+2)}$$

Därför är

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Anm:

"Tricket" med att förlänga med konjugat är användbart då man ska beräkna gränsvärden då det är rot-uttryck inblandade.

Anm:

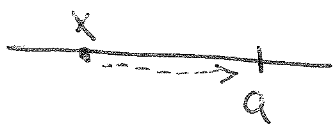
Gränsvärden är unika!

Om $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} f(x) = M$

så är $L = M$.

Def:

Låt $f(x)$ vara en funktion definierad på ett intervall (b,a). Om $f(x)$ närmar sig L då x närmar sig a från vänster så säger vi att $f(x)$ har vänster-gränsvärde L, skrivet $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.



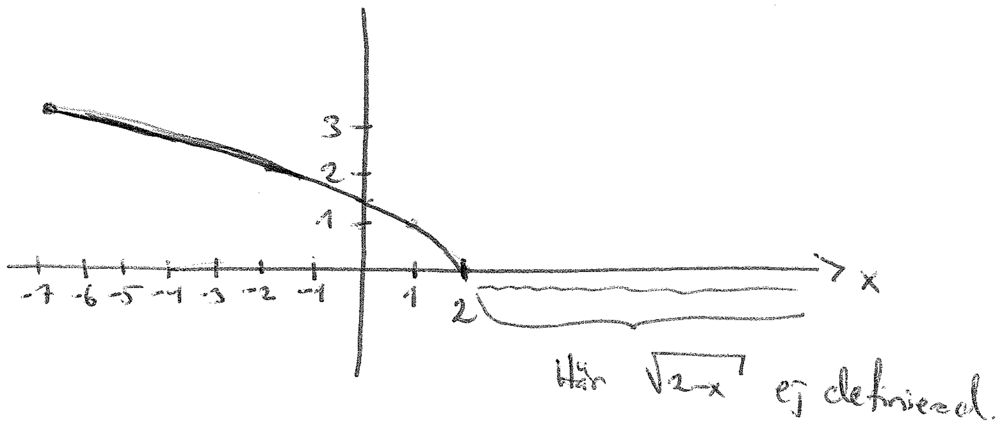
x närmar sig a från vänster.

På liknande sätt definierar man $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Ex:

Betrakta $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x}$ och $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{2-x}$

Låt oss betrakta dessa grafiskt först.



Därför är $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0$ och $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{2-x} = 0$.

Sats:

Låt $f(x)$ vara en funktion definierad i en omgivning till $x=a$. Då gäller att

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Räkneregler med gränsvärden:

Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är funktioner definierade i en omgivning till $x=a$. Antag att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{och} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M.$$

Då gäller att

1) $\lim_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L \pm M$

2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = L \cdot M$

3) $\lim_{x\to a} k f(x) = kL$

4) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$; $M \neq 0$

5) Om $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{x\to a} (f(x))^{m/n} = L^{m/n}$ om $L > 0$ och n är jämn eller $L \neq 0$ om $m < 0$.

6) Om $f(x) \leq g(x) \Rightarrow L \leq M$.

Ex:

Beräkna $\lim_{h \to 0} \frac{3h+4h^2}{h^2-h^3}$. Vi har att

$$\lim_{h \to 0} \frac{3h+4h^2}{h^2-h^3} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3+4h)}{\cancel{h}(h-h^2)}$$

Täljaren går mot 3 men nämnaren mot 0, så gränsvärdet existerar inte.

Ex:

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$? Observera att både täljaren och nämnaren går mot 0! Rotuttryck i nämnaren så vi prövar med att förlänga med konjugat:

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2} \cdot \frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} =$$

$$= \frac{(\cancel{x+1})(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{\cancel{x+1}}$$

Detta ger att $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \to 1} (x-1)(\sqrt{x+3}+2) = 0.$

Ex:

Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$. Kom ihåg att

$$|3x-1| = \begin{cases} 3x-1 & \text{om } 3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/3 \\ -3x+1 & \text{om } x \leq 1/3 \end{cases}$$

och

$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 & \text{om } x \geq -1/3 \\ -3x-1 & \text{om } x \leq -1/3 \end{cases}.$$

I en liten omgivning kring origo så är

$$|3x-1|-|3x+1| = -3x+1-3x-1 = -6x$$

Därför är

$$\lim_{x \to 0} \frac{|3x-1|-|3x+1|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-6x}{x} = -6.$$

Oändliga gränsvärden och $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Vad händer om värdet för en funktion blir oändligt stort då man ska beräkna gränsvärden eller om man vill beräkna $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$? Jo, då får man ~~[illegible]~~ "räkna" med tal som är enormt stora.

Oändlighetstecknet ∞ är <u>inte</u> ett reellt tal utan en symbol för något som är otroligt stort. T.ex har man följande räkneregler.

$$k \cdot \infty = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

$$k + \infty = \infty$$

Def:

Antag att $f(x)$ är en funktion definierad på intervallet (a,∞). Om $f(x)$ närmar sig L då man väljer x stort nog så säger vi att $f(x)$ går emot L då x går emot oändligheten, skrivet som

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

På samma sätt så definierar man $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

Fakta:

Om $P(x)$, $Q(x)$ är polynom. Då gäller att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{om } \deg Q > \deg P \\ \infty & \text{om } \deg P > \deg Q \\ \frac{m}{n} & \text{om } \deg P = \deg Q \\ & \text{för något } m,n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ex:

Beräkna $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^3+2x^2+2}{3x^3+1}$

Vi har att

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3+2x^2+2}{3x^3+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(4+\overset{\to 0}{2/x}+\overset{\to 0}{2/x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\underset{\to 0}{1/x^3}\right)} = \frac{4}{3}.$$

Ex:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{4x^3+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(2+\overset{\to 0}{3/x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(4x+\underset{\to 0}{1/x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{4x} = 0.$$

Ex:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(x+\overset{\to 0}{1/x}\right)}{\cancel{x}} = \pm\infty.$$

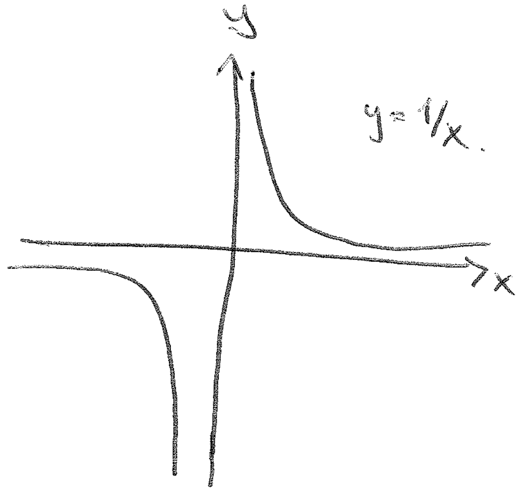
Ex:

Betrakta $f(x) = \frac{1}{x}$. Vad blir $\lim_{x \to 0} f(x)$?

Vi måste betrakta $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ och $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

Det är klart att

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$



och

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Eftersom ∞ endast är en symbol så kan man inte säga att höger- eller vänstergränsvärdet existerar eller inte. Man tolkar det som att det blir ett väldigt stort tal. Men eftersom $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ så existerar **inte** $\lim_{x \to 0} f(x)$. !!!